Outils mathématiques

Les nombres réels

- $(5) \times (5) = \Box$
- $(-5) \times (-5) = \Box$
- $\Box \times \Box = -25$ Il n'existe pas de nombre qu'on peut multiplier par lui même et obtenir un résultat négatif, mais pourrait-on en *inventer* un?

Les nombres complexes

$i = \sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \qquad i^2 = -1$

Même si $i \not\in \mathbb{R}$, on peut quand même faire des opérations mathématiques assez intéressantes avec:

- On peut multiplier:
  $\begin{align*} (1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{align*}$
- On peut trouver des racines:
  $\begin{equation*} z^4 = 16 \Rightarrow z^2 = \left\{ \begin{array}{rl} 4 \Rightarrow z &= \pm 2 \\ -4 \Rightarrow z &= \pm 2i \end{array} \right. \end{equation*}$ ou
  $\begin{equation*} z^8 = 256 \Rightarrow z^4 = \left\{ \begin{array}{rl} 16 \Rightarrow z^2 &= \left\{ \begin{array}{rl} 4 \Rightarrow z &= \pm 2 \\ -4 \Rightarrow z &= \pm 2i \end{array} \right. \\ -16 \Rightarrow z^2 &= \left\{ \begin{array}{rl} 4i \Rightarrow z &= \pm \sqrt{2}(1+i) \\ -4i \Rightarrow z &= \pm \sqrt{2}(1-i) \end{array} \right. \\ \end{array} \right. \end{equation*}$

Un peu de philosophie...

Si on peut soumettre ces nombres bizarres à toutes les règles d'algèbres qu'on connaît sans arriver à d'incohérence, est-ce que ça veut dire qu'ils *existent* autant que les nombres réels? Les nombres complexes ne sont-ils pas une *création* de la part des mathématiciens? Et les mathématiques ne sont-elles pas *découvertes*? D'une certaine manière, les nombres négatifs sont tout aussi bizarre. Après tout, on sait à quoi ça ressemble 5 voitures, mais -5 voitures? hmmm...

Plan complexe

Pour représenter un nombre complexe graphiquement: Par exemple: $z^8 = 256$:

Fix Me!: geogebra

Les points noires: $z = a + ib$ sont des solutions de l'équation $z^n = w$. On remarque:

- ...

- ...
- ...

Exercices

- Graphiquement, quelles seraient les solutions de \$ z^3 = 8 \$?
- Comment pourraient-on calculer ces nombres algébriquement?
- Algébriquement, calculer les racines de \$ z^2 = 2i \$ et vérifier vos réponses avec le graphique ci-dessous.

Fix Me!: Geogebra

Forme Polaire

Comme pour les vecteurs, les nombres complexes peuvent être exprimés en coordonnées cartésiennes ou polaires.

Fix Me!: Geogebra

Pour convertir d'une représentation à l'autre, on utilise Pythagore et un peu de trigonométrie:

\$$ a + ib \rightarrow r\angle \theta \$$	\$$ r\angle \theta \rightarrow a+ib \$$
\$$ r^2 = a^2 + b^2 \$$	\$$ a = r\cos\theta \$$
\$$ \tan \theta = \dfrac{b}{a} \$$	\$$ b = r\sin\theta \$$

Exercices

- Convertir \$ 6 \angle \frac{\pi}{3} \$ en coordonnées cartésiennes.
- Convertir \$ 8 - 2i \$ en coordonnées polaires.