

Outils mathématiques

Les nombres réels

- $(5) \times (5) = \Box$
- $(-5) \times (-5) = \Box$
- $\Box \times \Box = -25$ Il n'existe pas de nombre qu'on peut multiplier par lui même et obtenir un résultat négatif, mais pourrait-on en *inventer* un?

Les nombres complexes

$$i = \sqrt{-1} \iff i^2 = -1$$

Même si $i \notin \mathbb{R}$, on peut quand même faire des opérations mathématiques assez intéressantes avec:

- On peut multiplier:

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{aligned}$$
- On peut trouver des racines:

$$z^4 = 16 \Rightarrow z^2 = \pm 4 \Rightarrow z = \pm 2 \text{ ou } \pm 2i$$

$$z^8 = 256 \Rightarrow z^4 = \pm 16 \Rightarrow z = \pm 2 \text{ ou } \pm 2i$$

$$z^2 = \pm 4i \Rightarrow z = \pm \sqrt{2}(1+i) \text{ ou } \pm \sqrt{2}(1-i)$$

Un peu de philosophie...

Si on peut soumettre ces nombres bizarres à toutes les règles d'algèbres qu'on connaît sans arriver à d'incohérence, est-ce que ça veut dire qu'ils *existent* autant que les nombres réels? Les nombres complexes ne sont-ils pas une *création* de la part des mathématiciens? Et les mathématiques ne sont-elles pas *découvertes*? D'une certaine manière, les nombres négatifs sont tout aussi bizarre. Après tout, on sait à quoi ça ressemble 5 voitures, mais -5 voitures? hmmm...

Plan complexe

Pour représenter un nombre complexe graphiquement: Par exemple: $z^8 = 256$:



Les points noirs: $z = a + ib$ sont des solutions de l'équation $z^n = w$. On remarque:

- ...

- ...
- ...

Exercices

- Graphiquement, quelles seraient les solutions de $z^3 = 8$?
- Comment pourraient-on calculer ces nombres algébriquement?
- Algébriquement, calculer les racines de $z^2 = 2i$ et vérifier vos réponses avec le graphique ci-dessous.



Forme Polaire

Comme pour les vecteurs, les nombres complexes peuvent être exprimés en coordonnées cartésiennes ou polaires.



Pour convertir d'une représentation à l'autre, on utilise Pythagore et un peu de trigonométrie:

$a + ib \rightarrow r \angle \theta$	$r \angle \theta \rightarrow a + ib$
$r^2 = a^2 + b^2$	$a = r \cos \theta$
$\tan \theta = \frac{b}{a}$	$b = r \sin \theta$

Exercices

- Convertir $6 \angle \frac{\pi}{3}$ en coordonnées cartésiennes.
- Convertir $8 - 2i$ en coordonnées polaires.

Formule de Euler

La formule de Euler expose une relation très profonde entre les fonctions trigonométriques et les fonctions exponentiels ¹⁾: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Vérifions cette identité mystérieuse de deux façons.

La dérivée

Si on sépare cette identité en deux fonctions et qu'on prend la dérivées de ces deux fonctions, on remarque que:

$$\begin{aligned} \text{Si } f(\theta) &= e^{i\theta} \text{ et } g(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \\ \rightarrow f'(\theta) &= i e^{i\theta} \text{ et } g'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta \\ \rightarrow f'(\theta) &= i \cdot f(\theta) \text{ et } g'(\theta) = i \cdot g(\theta) \end{aligned}$$

On sait qu'il n'y a qu'une fonction $h(x)$ qui satisfasse l'équation différentiel $h'(x) = ah(x)$, et qu'elle est: $h(x) = A e^{ax}$ Ce que Euler à découvert est que quand $a = i$ il y a une deuxième fonction qui satisfasse la même équation différentiel! Ces deux fonctions doivent donc être la même.

Taylor

Une autre méthode de vérifier la formule d'Euler est d'utiliser les séries de Taylor:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Si on remplace x par $i\theta$ et qu'on additionne les séries de $\cos \theta$ et $i \sin \theta$ on obtiendra la série de $e^{i\theta}$

Exercices

- Utiliser la formule de Euler pour obtenir ces deux résultats qui seront très pratique:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Utiliser la formule de Euler pour démontrer d'un seul coup que:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\ \sin(\theta + \phi) &= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$

1)

Note, obtenir "la plus belle équation du monde", on met $\theta = \pi$ dans la formule de Euler...