# Optional Math of Waves

This is a brief survey of the math required to analyze waves at the first or second year university level.

## Real numbers

If $ (5) \times (5) = 25 $ and $ (-5) \times (-5) = 25 $, what number (and it has to be the same number) can you put in the boxes so that:

$$ \Box \times \Box = -25 $$

It turns out that nowhere on the *real* number line is there a number such that when you multiply it by itself you get a negative number since two positive numbers give a positive number, and two negative numbers also give a positive number.

But could we *invent* one?

## Complex Numbers

Let's create an imaginary number called $ i $ such that:

$$ i = \sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \qquad i^2 = -1 $$

Even though $ i $ is nowhere on the real line (in math, we say that: $ i \not\in \mathbb{R} $), we can non-the-less perform interesting mathematical operations with it:

- We can add it to a real number and create a *complex* number:

$$(1 + i) $$

- We can multiply complex numbers together:

$$\begin{align*} (1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{align*}$$

- We can find roots:

$$\begin{equation*} z^4 = 16 \Rightarrow z^2 = \left\{ \begin{array}{rl} 4 \Rightarrow z &= \pm 2 \\ -4 \Rightarrow z &= \pm 2i \end{array} \right. \end{equation*}$$

#### A Little Philosophy

If these weird numbers follow all of the algebra rules without inconsistencies, does it mean they *exist* as much as the real numbers? Aren't complex numbers a mere *creation* of mathematicians? Is mathematics *discovered* or *invented*?[1)] In a certain way, negative numbers are just as weird as complex numbers: after all, we know what 5 cars look like, but $-5$ cars?

# The Complex Plane

To represent a complex number graphically, we can use the horizontal axis for the real part and the vertical axis for the imaginary part. For example, \$ (1 + i) \$ could be represented as a point 45° up the horizontal axis and \$ \sqrt{2} \$ away from the origin.

You can move the point around to see what the polar representation \$ (r \angle \theta) \$ is.

Download polar.ggb

To convert between the Cartesian \$(a,b) \$ and the Polar \$ (r \angle \theta) \$ representations, only simple trigonometry and Pythagoras is needed.

| **\$$ a + ib \rightarrow r\angle \theta \$$** | **\$$ r\angle \theta \rightarrow a+ib \$$** |
|---|---|
| \$$ r^2 = a^2 + b^2 \$$ | \$$ a = r\cos\theta \$$ |
| \$$ \tan \theta = \dfrac{b}{a} \$$ | \$$ b = r\sin\theta \$$ |

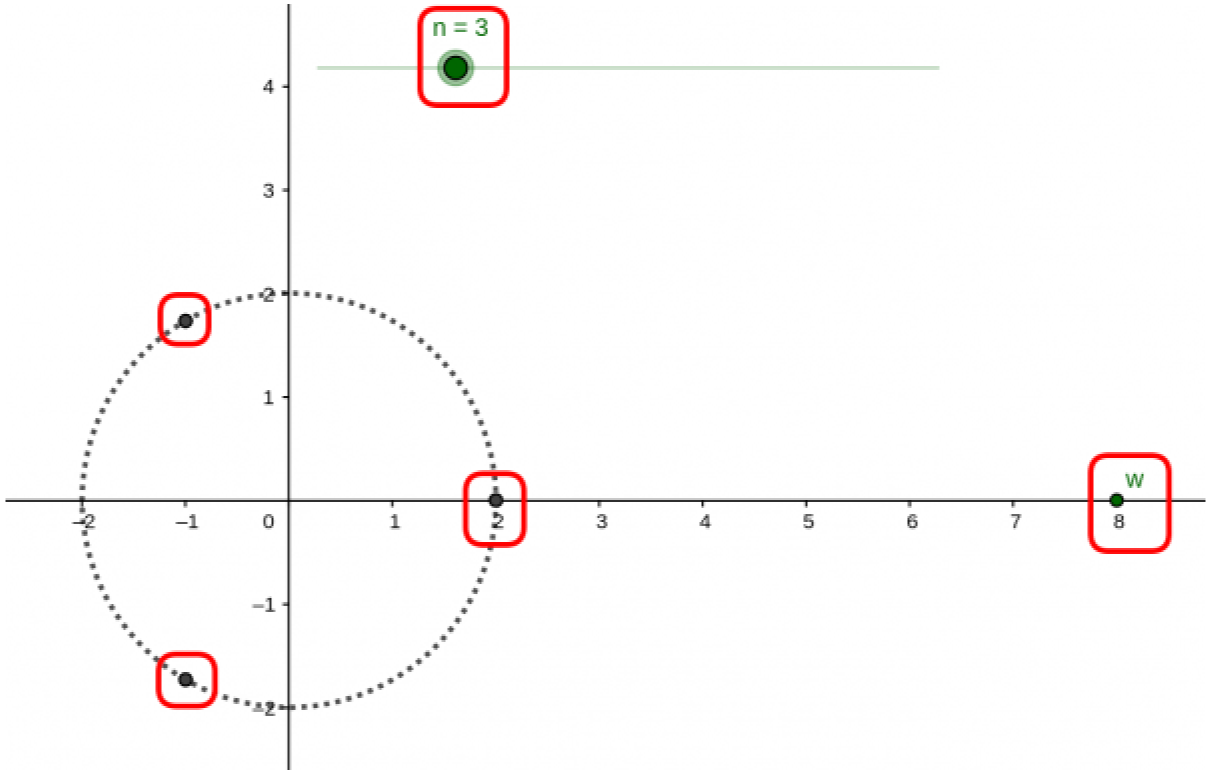
## Roots

The complex plan allows us to take another look at how to find roots of the form \$ z^n = w \$. For example, if we set \$ w = 9 \$ and \$ n = 2 \$ on the graph below, we'll see that the roots to \$z^2 = 9 \$ are \$ z = \pm 3 \$.

Download complexroots.ggb

Without using the graph above, what do you expect the solution(s) to \$ z^3 = 8 \$ will be? That is, what number(s), when multiplied by itself three times gives 8?

Now move \$ w = 8 \$ and \$n = 3 \$ to have a look at the solutions.




So z = 2 was to be expected since \$ 2^3 = 8 \$ but it looks like there's two more solutions.

To find them, we first notice that the three solutions are spread out evenly around the circle, that is they are 120° apart. So in polar coordinates, the three solutions are \$z = 2\angle 0^\circ, \quad 2\angle 120^\circ,\quad 2\angle 240^\circ \$.

We can now convert them to Cartesian:

- \$z = 2\angle 0^\circ = \big(2\cos(0^\circ), 2\sin(0^\circ)\big) = (2, 0) = 2\$
- \$z = 2\angle 120^\circ = \big(2\cos(120^\circ), 2\sin(120^\circ)\big) = (-1, \sqrt{3}) = -1 + i\sqrt{3}\$
- \$z = 2\angle 240^\circ = \big(2\cos(240^\circ), 2\sin(240^\circ)\big) = (-1, -\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3}\$

Let's check that the second solution works: \begin{align*} (-1 + i\sqrt{3})^3 &= (-1 + i\sqrt{3})\cdot(-1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3}) \\ &= (-1 + i\sqrt{3})\cdot\big(1 -2i\sqrt{3} +(i^2)(3)\big) \\ &= (-1 + i\sqrt{3})\cdot\big(1 -2i\sqrt{3} +(-1)(3)\big) \\ &= (-1 + i\sqrt{3})\cdot(-2 -2i\sqrt{3}) \\ &= 2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} -(2)i^2(3) \\ &= 2 -(2)(-1)(3) \\ &= 2 + 6 \\ &= 8 \end{align*}

# The Euler Identity

The Euler identity exposes a deep relation, between trigonometric and exponential functions[2]:

\$\$ e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta \$\$

Vérifions cette identité mystérieuse de deux façons.

**La dérivée**

Si on sépare cette identité en deux fonctions et qu'on prend la dérivées de ces deux fonctions, on remarque que: \$ \begin{align*} \text{Si} && f(\theta) &= e^{i \theta} &\text{ et }&& g(\theta) &= \cos \theta + i \sin \theta \\ \Rightarrow && f'(\theta) &= i e^{i \theta} &\text{ et }&& g'(\theta) &= -\sin \theta + i \cos \theta \\ \Rightarrow && f'(\theta) &= i \cdot f(\theta) &\text{ et }&& g'(\theta) &= i \cdot g(\theta) \end{align*} \$

On sait qu'il n'y a qu'une fonction \$ h(x) \$ qui satisfasse l'équation différentiel \$ h'(x) = ah(x) \$, et qu'elle est: \$ h(x) = A e^{ax} \$ Ce que Euler à découvert est que quand \$ a = i \$ il y a une deuxième fonction qui satisfasse la même équation différentiel! Ces deux fonctions doivent donc être la même.

#### Taylor

Une autre méthode de vérifier la formule d'Euler est d'utiliser les séries de Taylor:

\$ \begin{align*} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \end{align*} \$

Si on remplace \$ x \$ par \$ i \theta \$ et qu'on additionne les séries de \$ \cos \theta \$ et \$ i \sin \theta \$ on obtiendra la série de \$ e^{i \theta} \$

#### Exercices

- Utiliser la formule de Euler pour obtenir ces deux résultats qui seront très pratique:

\$\$ \cos \theta = \dfrac{e^{i \theta} + e^{-i \theta}}{2} \qquad \text { et } \qquad \sin \theta = \dfrac{e^{i \theta} - e^{-i \theta}}{2i} \$\$

- Utiliser la formule de Euler pour démonter d'un seul coup que:

\$ \begin{align*} \cos (\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \qquad \text{et}\\ \sin (\theta + \phi) &= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \end{align*} \$

- Utiliser les deux résultats de la formule de Euler pour démontrer que:

\$\$ \sin (\theta + \Delta \theta) + \sin (\theta - \Delta \theta) = 2 \cos \Delta \theta \sin \theta \$\$ (ce qui sera très important quand nous ferons de l'interférence d'onde...)

# Équations différentiels

Dans la physique des ondes, on aura bientôt à trouver la solutions d'une équation différentiel de ce type: \$\$ a \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + c x(t) = 0 \$\$

Dans nos applications, les paramètres \$ a, b, c \$ serons tous des quantités réels et positive. Même sans avoir étudier le sujet d'équation différentiels en profondeurs, on peut imaginer qu'une solution possible serait \$ x(t)= e^{rt} \$ puisque la dérivé d'une fonction exponentiel est elle même une fonction exponentiel, ce qui est encourageant... L'étape suivante est donc d'essayer cette fonction dans l'équation différentiel, pour trouver les valeurs de \$ r \$ qui fonctionnent. Donc:

\$ \begin{align*} & x (t) = e^{rt} \\ \Rightarrow \qquad & \dot{x}(t) = r e^{rt} \\ \Rightarrow \qquad & \ddot{x}(t) = r^2 e^{rt} \end{align*} \$

et notre équation différentiel devient:

\$ \begin{align*} & a \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + c x(t) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & a (r^2 e^{rt}) + b (r e^{rt}) + c (e^{rt}) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & e^{rt} (a r^2 + b r + c ) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & a r^2 + b r + c = 0 \end{align*} \$

\$ \Rightarrow \qquad r = - \dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \$

Puisque \$ r \$ contient une racine carré, il peut être réel, ou complexe. Pour simplifier la notation, disons que: \$ \alpha = \dfrac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = \dfrac{\sqrt{|{b^2 - 4ac}|}}{2a} \$

Nous pourrons donc dire que: \$ \begin{equation*} r = \left\{ \begin{array}{rl} -\alpha \pm \beta & \text{si } b^2 - 4ac > 0,\\ -\alpha \pm i \beta & \text{si } b^2 - 4ac < 0, \end{array} \right. \end{equation*} \$

Examinons les deux cas en plus de détails.

**Cas 1:**

Quand \$ b^2 - 4ac > 0 \$ , \$ r \$ est réel et la solutions général sera:

\$ \begin{align*} x(t) &= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\ &= A_1 e^{( -\alpha + \beta) t} + A_2 e^{( -\alpha - \beta) t} \\ &= A_1 e^{-\alpha t} e^{\beta t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-\beta t} \end{align*} \$

\$\$ x(t) = e^{-\alpha t} ( A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t} ) \$\$

C'est normal d'avoir deux constantes d'intégrations puisque notre équation différentiel a une dérivé du second degré. Pour trouver ces constantes, ça nous prendrait des valeurs initiales.

**Cas 2:**

Quand \$ b^2 - 4ac < 0 \$ , \$ r \$ est complexe et nous utiliserons la formule de Euler pour simplifier notre solutions.

\$ \begin{align*} x(t) &= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\ &= A_1 e^{( -\alpha + i \beta) t} + A_2 e^{( -\alpha - i \beta) t} \\ &= A_1 e^{-\alpha t} e^{i \beta t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-i \beta t} \\ &= e^{-\alpha t} ( A_1 e^{i \beta t} + A_2 e^{-i \beta t} ) \\ &= e^{-\alpha t} \Big( A_1 \big(cos( \beta t) + i \sin( \beta t) \big) + A_2 \big(cos( -\beta t) + i \sin( -\beta t) \big) \Big) \\ &= e^{-\alpha t} \Big( A_1 \big(cos(\beta t) + i \sin(\beta t) \big) + A_2 \big(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\big)\Big) \\ &= e^{-\alpha t} \Big( (A_1 + A_2) \cos(\beta t) + i (A_1 - A_2) \sin(\beta t) \Big) \\ &= e^{-\alpha t} \Big( a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t) \Big) \\ &= e^{-\alpha t} \Big( A \sin \phi \cos(\beta t) + A \cos \phi \sin(\beta t) \Big) \end{align*} \$

Dans les deux dernière ligne, nous avons ré-écrit les constantes d'intégration:

\$ \begin{align*} a_1 &= A_1 + A_2 & , a_2 &= i(A_1 - A_2) \\ a_1 &= A \sin \phi & , a_2 &= A \cos \phi \end{align*} \$

Pour finalement pouvoir utiliser une identité trigonométrique:

\$\$ x(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \$\$

**Exemple**

Nous avons donc deux types de solutions complètement différents qui dépendent de trois paramètres \$ a, b, c \$. Pour voir comment ces paramètres affectent le graphique, imaginons qu'une de nos conditions initiales est \$ \phi = \frac{\pi}{2} \$ . Ça veut dire que:

\$ \begin{align*} & a_1 = A \sin \pi/2 = A & & a_2 = A \cos \pi/2 = 0 \\ \Rightarrow \qquad & A_1 + A_2 = A & & A_1 - A_2 = 0 \\ \Rightarrow \qquad & A_1 = A/2 & & A_2 = A/2 \end{align*} \$

Dans ce cas particulier, nous avons donc:

\$ \begin{equation*} x(t) = \left\{ \begin{array}{rl} A e^{-\alpha t} \dfrac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} & \text{si } b^2 - 4ac > 0 ,\\ A e^{-\alpha t} \cos(\beta t) & \text{si } b^2 - 4ac < 0 ,\\ \end{array} \right. \end{equation*} \$

Fix Me! Geogebra

[1]
Whether math is discovered or invented is a famous philosophical problem. If you think it's invented: does that mean that 2 + 2 didn't equal 4 until someone invented that? If you think it's discovered, what about computer programs? At the root, all computing is basically just math.
[2]
Note, to obtain the ——most beautiful equation in the world“, put set \$ \theta = \pi \$ in the Euler identity ...